

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE INTEGRAÇÃO TRAPEZOIDAL EM SISTEMAS ELÉTRICOS

J. R. Cogo
IEE - EFEI

A. R. C. de Oliveira
Univ. Taubaté

Artigo apresentado no Seminário de Pesquisa EFEI 1983

RESUMO

Este artigo apresenta a aplicação do método trapezoidal a solução de problemas transitórios em sistemas elétricos de potência dando atenção maior ao estudo de parâmetros concentrados.

ABSTRACT

This paper presents an application of trapezoidal method for solution of transients problems in electric power systems with attention for the study of lumped parameters.

1. INTRODUÇÃO

Na análise dos fenômenos transitórios em sistemas elétricos de potência depara-se com um sério problema que é a solução das equações diferenciais que descrevem o comportamento físico do fenômeno a ser analisado. No estudo de sobretensões, por exemplo, não interessa na maioria dos casos conhecer as soluções de estado permanente, mas sim as soluções de estado transitório que definem os picos máximos e as formas de onda de tensão em função das quais serão especificados os equipamentos de proteção do sistema.

Consideremos um trecho qualquer de um sistema elétrico que possa ser representado pelo circuito equivalente da Figura 1.

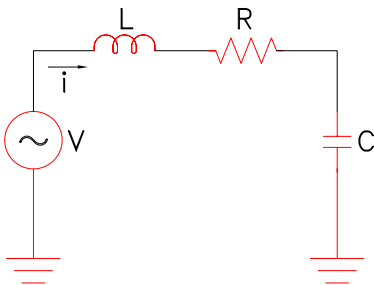


Figura 1 - Circuito equivalente

A equação diferencial que descreve o comportamento físico do sistema é a seguinte:

$$V = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt \quad (1)$$

A solução dessa equação pode ser obtida numericamente, através de um dos métodos numéricos de solução de equações diferenciais como Euler, Runge Kutta e outros.

O problema aumenta em complexidade quando se deseja representar o sistema com mais detalhe. Dessa forma passa-se a ter mais malhas e não apenas

uma como na Figura 1. Portanto pode-se também ter um sistema de equações diferenciais e não apenas uma como a equação (1).

A aplicação do método trapezoidal usa a simplificação de tais problemas através da transformação de um conjunto de equações diferenciais em um conjunto equivalente de equações algébricas.

2. MÉTODO TRAPEZOIDAL {3, 4, 5, 7}

Inicialmente comenta-se o método de integração trapezoidal. Os processos numéricos de integração tem como objetivo definir o valor da integral dentro de um intervalo definido, o que corresponde a área sob a curva que define a função $f(x)$ no intervalo X_n a X_{n+1} , como mostrado na Figura 2.

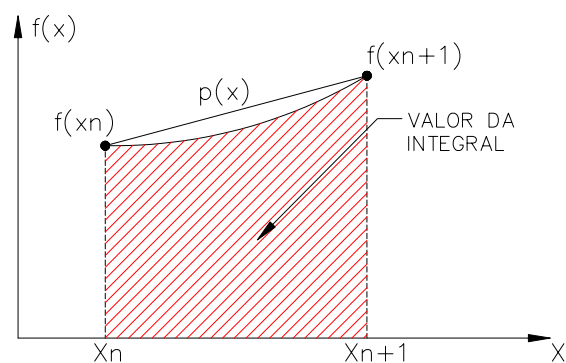


Figura 2 - Aplicação do método de integração trapezoidal

No caso do método trapezoidal considera-se uma interpolação linear, representando-se a função $f(x)$ através de um polinômio $p(x)$. Portanto a área sob a reta definida pelo polinômio caracteriza o valor da integral, e como essa área é da forma de trapézio como mostrado na Figura 2, tem-se:

$$I = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx = \frac{\Delta x}{2} [f(x_{n+1}) + f(x_n)] \quad (2)$$

onde o valor Δx corresponde ao intervalo compreendido entre x_n e x_{n+1} .

A solução de equações diferenciais se caracteriza por uma família de curvas, porém deve existir uma solução única para o sistema em análise, definida em termos das condições iniciais do sistema.

Considerando-se a equação diferencial descrita na equação (3):

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y(x)) \quad (3)$$

Integrando a equação no intervalo x_n a x_{n+1} .

$$Y(x_{n+1}) = Y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, Y(x))dx \quad (4)$$

Aplicando-se a regra de integração trapezoidal definida na equação (2) obtém-se:

$$Y(x_{n+1}) = Y(x_n) + \frac{\Delta x}{2} [f(x_n, Y(x_n)) + f(x_{n+1}, Y(x_{n+1}))] \quad (5)$$

Adotando-se os seguintes valores:

$$Y_{n+1} = Y(x_{n+1})$$

$$Y_n = Y(x_n)$$

Substituindo estes valores na equação (5) tem-se:

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{\Delta x}{2} [f(x_n, Y_n) + f(x_{n+1}, Y_{n+1})] \quad (6)$$

A equação (6) caracteriza o método trapezoidal implícito devido ao fato do termo T_{n+1} aparecer nos dois lados da equação, o que exige a aplicação de um método iterativo de solução. Porém, na aplicação que será mostrada haverá possibilidade de explicitação.

Outras características do método trapezoidal podem ser encontradas nas referências [1] e [2].

3. APLICAÇÃO DO MÉTODO TRAPEZOIDAL AOS SISTEMAS ELÉTRICOS {3, 4, 5, 7}

Mostra-se a aplicação do método trapezoidal na solução de problema de sistemas elétricos envolvendo parâmetros concentrados: indutâncias, capacitâncias e resistências.

3.1. INDUTÂNCIAS

Considere o ramo com uma indutância concentrada mostrado na Figura 3.

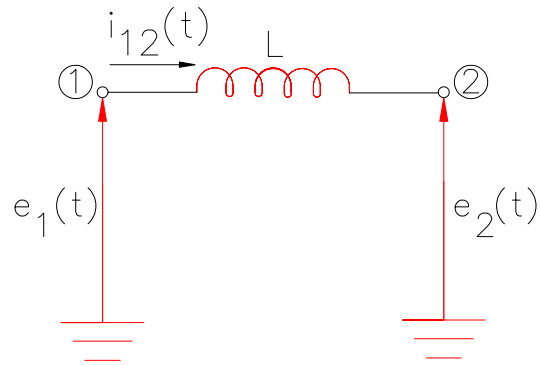


Figura 3 - Indutância concentrada

A equação diferencial que descreve o comportamento físico deste ramo indicado na Figura 3 é a seguinte:

$$e_1(t) - e_2(t) = L \frac{di_{12}(t)}{dt} \quad (7)$$

Explicitando o termo em derivada e integrando no intervalo $t - \Delta t$ a t , obtém-se:

$$i_{12}(t) = i_{12}(t - \Delta t) + \frac{1}{L} \int_{t-\Delta t}^t [e_1(t) - e_2(t)] dt \quad (8)$$

Aplicando-se o método trapezoidal, em (8) obtém-se:

$$i_{12}(t) = i_{12}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2L} [e_1(t) - e_2(t) + e_1(t - \Delta t) - e_2(t - \Delta t)] \quad (9)$$

Por conveniência divide-se a equação em duas partes:

$$i_{12}(t) = \frac{\Delta t}{2L} [e_1(t) - e_2(t)] + I_{12}(t - \Delta t) \quad (10)$$

onde:

$$I_{12}(t - \Delta t) = i_{12}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2L} [e_1(t - \Delta t) + e_2(t - \Delta t)] \quad (11)$$

Fisicamente estas equações podem representar o circuito mostrado na Figura 4.

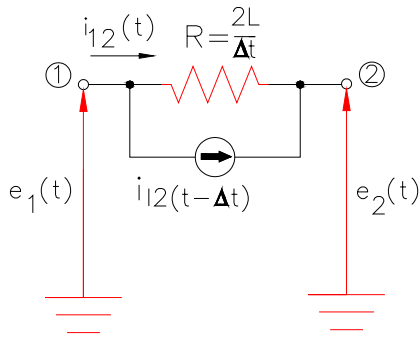


Figura 4 - Circuito equivalente ao da Figura 3

Portanto, transforma-se uma equação diferencial em uma equação algébrica. A indutância passou a ser representada por uma resistência equivalente e uma fonte de corrente em paralelo que contém a história passada, pois a cada novo intervalo de tempo, a fonte contribui com um valor correspondente ao intervalo anterior.

3.2. CAPACITÂNCIAS

Considere o ramo com uma capacitância concentrada mostrado na Figura 5.

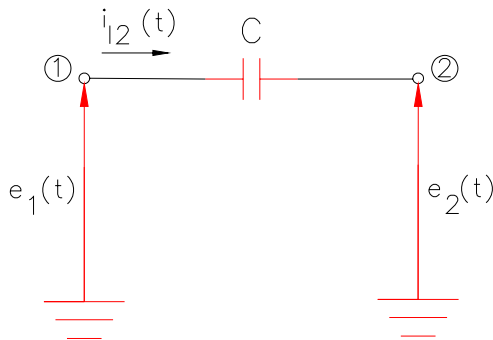


Figura 5 - Capacitâncias concentradas

A equação diferencial que descreve o comportamento físico do ramo indicado na Figura 5 é a seguinte:

$$e_1(t) - e_2(t) = \frac{1}{C} \int i_{12}(t) dt \quad (12)$$

Derivando a expressão, (12) vem:

$$\frac{d[e_1(t) - e_2(t)]}{dt} = \frac{1}{C} i_{12}(t) dt \quad (13)$$

Aplicando-se o método trapezoidal no intervalo $t - \Delta t$, tem-se:

$$[e_1(t) - e_2(t)] - [e_1(t - \Delta t) + e_2(t - \Delta t)] = \frac{\Delta t}{2C} [i_{12}(t) + i_{12}(t - \Delta t)] \quad (14)$$

Por conveniência divide-se a equação (14) em duas partes.

$$i_{12}(t) = \frac{2C}{\Delta t} [e_1(t) - e_2(t)] + I_{12}(t - \Delta t) \quad (15)$$

onde:

$$I_{12}(t - \Delta t) = -i_{12}(t - \Delta t) - \frac{2C}{\Delta t} [e_1(t - \Delta t) + e_2(t - \Delta t)] \quad (16)$$

Fisicamente estas equações podem representar o circuito mostrado na Figura 6.

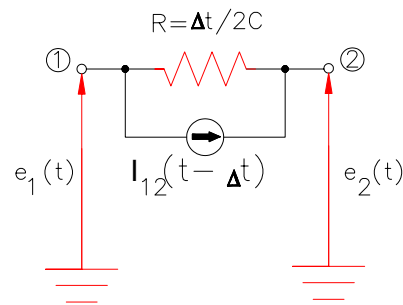


Figura 6 - Circuito equivalente ao da Figura 5

Da mesma maneira como no caso de indutância transforma-se uma capacitância em uma resistência equivalente em paralelo com uma fonte de corrente que contém a informação da história passada.

3.3. RESISTÊNCIAS

Considere o ramo com uma resistência concentrada mostrado na Figura 7.

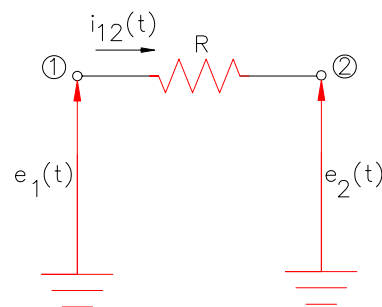


Figura 7 - Resistência concentrada

A equação que descreve o comportamento físico do ramo é a seguinte:

$$i_{12}(t) = \frac{1}{R} [e_1(t) - e_2(t)] \quad (17)$$

Neste caso, como não se tem uma equação diferencial, o circuito equivalente é o mesmo do

circuito original considerando a fonte de história passada nula:

$$I_{12} = 0 \quad (18)$$

3.4. RAMOS MISTOS

É possível combinar indutâncias, capacitâncias e resistências e aplicar a regra trapezoidal a esses ramos obtendo-se o mesmo tipo de circuito equivalente. Será mostrado a seguir apenas as equações válidas para estes ramos.

3.4.1. RAMO R-L

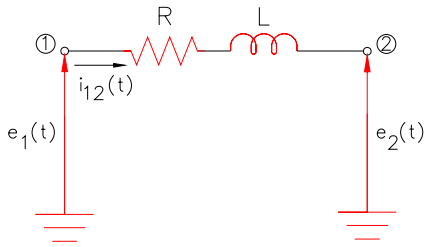


Figura 8 - Resistências e indutâncias concentradas

$$i_{12}(t) = \frac{1}{\frac{2L}{\Delta t} + R} [e_1(t) - e_2(t)] + I_{12}(t - \Delta T) \quad (19)$$

$$I_{12}(t - \Delta t) = \frac{1}{\frac{2L}{\Delta t} + R} \left[\frac{2L}{\Delta t} - R \right] i_{12}(t - \Delta t) + \frac{1}{\frac{2L}{\Delta t} + R} [e_1(t - \Delta t) - e_2(t - \Delta t)] \quad (20)$$

3.4.2. RAMO R-C

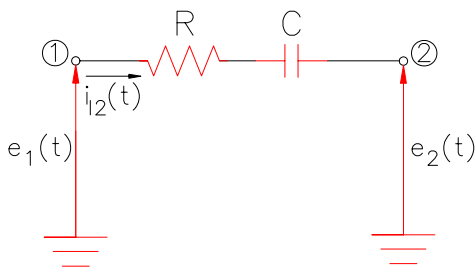


Figura 9 - Resistências e capacitância concentradas

$$i_{12}(t) = \frac{1}{\frac{\Delta t}{2C} + R} [e_1(t) - e_2(t)] + I_{12}(t - \Delta t) \quad (21)$$

$$I_{12}(t - \Delta t) = \frac{1}{\frac{\Delta t}{2C} + R} \left[R - \frac{\Delta t}{2C} \right] i_{12}(t - \Delta t) - \frac{1}{\frac{\Delta t}{2C} + R} [e_1(t - \Delta t) - e_2(t - \Delta t)] \quad (22)$$

3.4.3. RAMO L-C

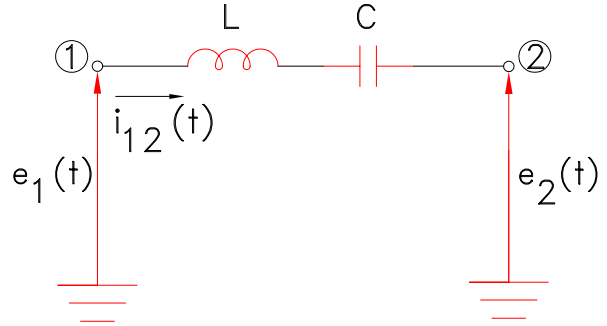


Figura 10 - Indutância e capacitância concentrada

$$i_{12}(t) = \frac{1}{\frac{2L}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2C}} [e_1(t) - e_2(t)] + I_{12}(t - \Delta t) \quad (23)$$

$$I_{12}(t - \Delta t) = \frac{1}{\frac{2L}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2C}} \left[\frac{2L}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{C} \right] i_{12}(t - \Delta t) - \frac{1}{\frac{2L}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2C}} [e_1(t - \Delta t) - e_2(t - \Delta t)] - \frac{\Delta t^2}{4LC + \Delta t^2} \cdot i_{12}(t - 2\Delta t) \quad (24)$$

3.4.4. RAMO R-L-C

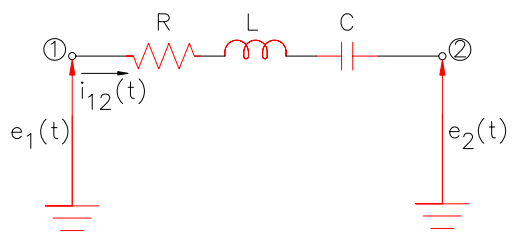


Figura 11 - Resistência, indutância e capacitância concentrada

$$i_{12}(t) = \frac{1}{R + \frac{2L}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2C}} [e_1(t) - e_2(t)] + I_{12}(t - \Delta t) \quad (25)$$

$$I_{12}(t - \Delta t) = \frac{1}{R + \frac{2L}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2C}} \left[\frac{2L}{\Delta t} - R - \frac{\Delta t}{C} \right] \cdot i_{12}(t - \Delta t) + \frac{1}{R + \frac{2L}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2C}} [e_1(t) - e_2(t)] - \frac{\Delta t^2}{4LC + 2RC\Delta t + \Delta t^2} \cdot i_{12}(t - 2\Delta t) \quad (26)$$

4. EQUAÇÕES NODAIS

Considere o trecho de um sistema representado na Figura 12.

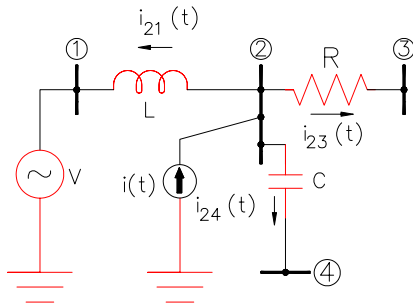


Figura 12 - Parte de um sistema de potência em análise

Da Figura 12, tem-se:

$$i(t) = i_{21}(t) + i_{24}(t) + i_{23}(t) \quad (27)$$

Substituindo as equações de cada ramo acordo com o desenvolvimento no item anterior, obtém-se:

$$i(t) = \frac{\Delta t}{2L} [e_2(t) - e_1(t)] + I_{21}(t - \Delta t) + \frac{2C}{\Delta t} [e_2(t) - e_4(t)] + I_{24}(t - \Delta t) + \frac{1}{R} [e_2(t) - e_3(t)] \quad (28)$$

Reescrevendo a equação (28)

$$-\frac{\Delta t}{2L} e_1(t) + \left[\frac{2C}{\Delta t} + \frac{1}{R} + \frac{\Delta t}{2L} \right] e_2(t) - \frac{1}{R} e_3(t) - \frac{2C}{\Delta t} e_4(t) = i(t) - I_{42}(t - \Delta t) - I_{12}(t - \Delta t) \quad (29)$$

Ou em termos matriciais, vem:

$$[Y] [e] = [i] - [I] \quad (30)$$

onde:

[Y] - matriz de admitância nodal relativa aos elementos equivalentes;

[e] - vetor de tensões;

[i] - vetor de correntes injetadas em cada barra;

[I] - vetor de história passada devido a aplicação do método trapezoidal.

O interesse neste tipo de estudo é a determinação dos valores de tensão nas barras onde estas não são conhecidas. Por análise da Figura 12 nota-se que no sistema existem barras com valores conhecidos de tensão com a barra 1, e existem também barras com valores desconhecidos, como as barras 2, 3 e 4.

É, portanto conveniente considerar esse fato na equação (30).

Adotando-se o subíndice A para indicar barras com valores desconhecidos de tensão e o subíndice B para indicar barras com valores conhecidos de tensão. Dessa forma a equação 30 torna-se:

$$\begin{bmatrix} [Y_{AA}] & [Y_{AB}] \\ [Y_{BA}] & [Y_{BB}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [e_A] \\ [e_B] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [i_A] \\ [i_B] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [I_A] \\ [I_B] \end{bmatrix} \quad (31)$$

Pode-se obter duas equações a partir da equação (31), porém, apenas uma é necessária a determinação dos valores desconhecidos de tensão que constitui o vetor e_A . Portanto neste caso tem-se:

$$[Y_{AA}] [e_A] + [Y_{AB}] [e_B] = [i_A] - [I_A] \quad (32)$$

ou ainda:

$$[Y_{AA}] [e_A] = [i_A] - [I_A] - [Y_{AB}] [e_B] \quad (33)$$

A equação (33) constitui a equação de solução geral.

A obtenção do vetor $[e_A]$ é conseguida através de um processo de fatoração da matriz $[Y_{AA}]$, conhecidos os valores do lado direito da equação.

O vetor $[i_A]$ que corresponde as fontes de correntes injetadas normalmente é nulo.

As matrizes $[Y_{AA}]$ e $[Y_{AB}]$ são construídas seguindo as mesmas regras usadas para construção da matriz de admitância nodal utilizada em estudos de estado permanente.

O vetor $[e_B]$ é constituído das fontes de tensão do sistema.

Para o sistema da Figura 12 o circuito equivalente de acordo com a regra trapezoidal está mostrado na Figura 13, e a equação matricial correspondente a equação (33) está mostrado na equação (34).

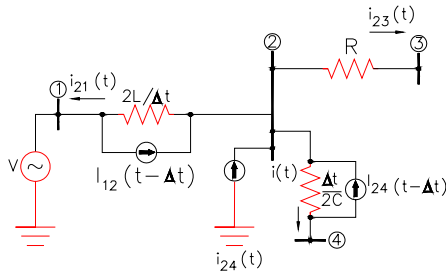


Figura 13 - Circuito equivalente ao da Figura 12

$$\begin{matrix} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{R} & -\frac{2C}{\Delta t} \\ \frac{2L}{\Delta t} + R + \frac{\Delta t}{2C} & \frac{1}{R} & 0 \\ -\frac{1}{R} & 0 & \frac{2C}{\Delta t} \\ -\frac{2C}{\Delta t} & 0 & \frac{2C}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_3(t) \\ e_4(t) \end{bmatrix} = \begin{matrix} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{matrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} I_{12}(t - \Delta t) + I_{42}(t - \Delta t) \\ 0 \\ -I_{42}(t - \Delta t) \end{bmatrix} - \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{1} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{matrix} \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{2L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V] \cdot 1 \\ [e_B] \end{bmatrix} \quad (34)$$

O fluxograma básico para solução do problema é mostrado na Figura 14.

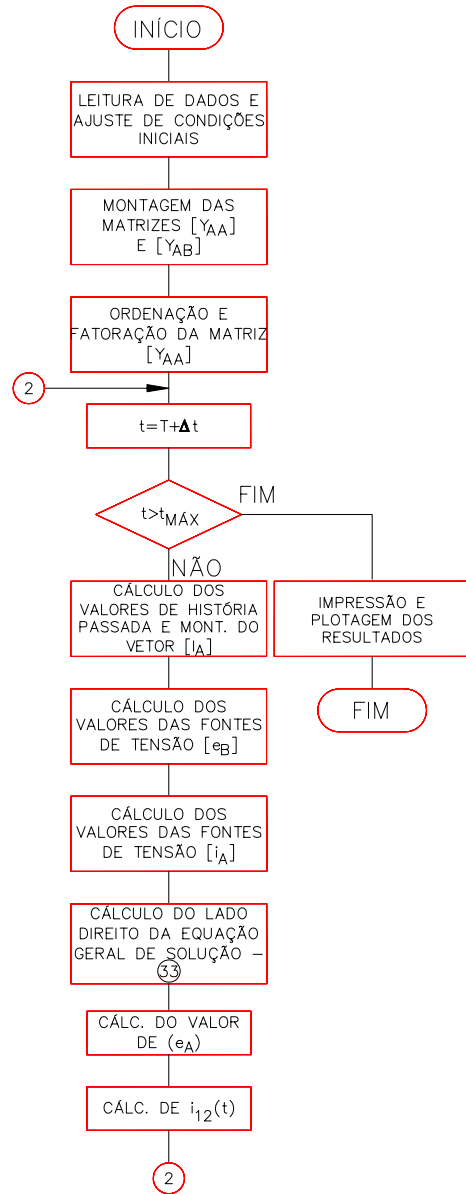


Figura 14 - Fluxograma para obtenção de |e_A|

5. CONCLUSÕES

No presente trabalho todos os elementos foram transformados em um único elemento base: resistência. Existem propostas para utilização da indutância ou da capacitância como elemento base como mostrado na referência [6]. Podem ocorrer oscilações matemáticas devido a aplicação desta metodologia principalmente nos seguintes casos: indutância em série com chave e capacitâncias em paralelo com fontes de tensão [7].

Esta metodologia pode-se estender a qualquer outro tipo de estudo de sobretensão em sistemas elétricos de potência através do equacionamento matemático do problema e sua adaptação através do método trapezoidal.

Entre estes estudos pode-se citar:

- energização de linhas através da modelagem de linhas de transmissão;
- energização de transformadores considerando a não linearidade devido ao ramo magnetizante;
- modelagem de pára-raios;
- modelagem de máquinas síncronas.

Um exemplo claro desta metodologia é o programa EMTP para estudos de transitórios disponíveis na maioria das empresas concessionárias de energias.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] GEAR, C. WILLIAM - "Numerical Itial Value Problems in Ordinary Differential Equations", Prentice Hall, Inc - New Jersey, 1971;
- [2] ATKINSON, KENDALL E - "An Introduction to Numerical Analysys", Wiley - New York, 1978;
- [3] DOMMEL, H. W. - "A Method for Solving Transient Phenomena in Multiphase System", Proceedings of Power Systems Computation Conference, 1966;
- [4] DOMMEL, H. W.; W. SCOOT MEYER - "Computation of Electromagnetic Transients", Proceedings of the IEEE, Vol. 62, nº 7, Julho - 1974;
- [5] DOMMEL, H. W. - "Digital Computer Solution of Electromagnetic Transients in Single and Multiphase Networks", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-88, nº 4, julho/1969;
- [6] DEGENEFF, R. C. - "Reducing Storage and Saving Computational time with a Generalization of the Dommel (BPA) Solution Method", Power Industry Computer Applications Conference - PICA, maio 24/27-1977, Toronto, Ontário, Canadá - IEEE Conference Proceedings;
- [7] DOMMEL, H. W. - "Transients Program Manual", The University of British Columbia, Agosto/1978, Canadá.